

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В БЕСКОНЕЧНОЙ УПРУГОЙ  
СРЕДЕ, ПОПЕРЕЧНО ПОДКРЕПЛЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ  
ОБОЛОЧКИ С ПРОТЕКАЮЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ

Дж.М.МУСТАФАЕВ, Ф.Ф.АЛИЕВ

Бакинский Государственный Университет

Сумгаитский филиал Азербайджанского института учителей

*В данной работе исследованы собственные частоты колебаний шарнирно-опертой по краям замкнутой цилиндрической оболочки, в бесконечной упругой среде, усиленной регулярной системой поперечных ребер с протекающей жидкостью. Построены частотные уравнения колебаний рассмотренной системы и дана численная реализация решения. Показано, что с повышением скорости жидкости частота колебаний системы падает.*

Данная работа посвящена исследованию собственных частот колебаний шарнирно-опертой по краям круговой замкнутой цилиндрической оболочки в бесконечной упругой среде, усиленной регулярной системой поперечных ребер с протекающей жидкостью. Оболочка моделируется как конструктивно - ортотропная, а ее движение описывается системой уравнений в перемещениях. К такой расчетной модели приводятся, например, различные емкости и трубопроводы, конструкции актуального назначения и т.д. Поэтому разработка теории и методов расчета на колебания подкрепленных цилиндрических оболочек с протекающей жидкостью с учетом влияния среды является актуальной задачей, имеющей большое практическое значение.

Дополняя уравнения движения оболочки, среды и жидкости контактными условиями получено частотное уравнение для нахождения собственных частот колебаний оболочки в бесконечной среде, усиленной продольными ребрами с протекающей жидкостью. Исследованы влияния физических и механических параметров ребер, среды и скорости течения жидкости на частоты собственных колебаний рассмотренной конструкции.

Движения оболочки согласно [1], описывается следующей системой уравнений:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial \xi \partial \theta} - \nu \frac{\partial}{\partial \xi} w - \rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} = \frac{R^2 (1-\nu^2)}{Eh} q_x$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \theta} + \left\{ \frac{1-\nu}{2} (1+\eta \alpha^2) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left[ 1 + \left( 1 - \frac{h_s}{r} \right)^2 \gamma_s^{(2)} + \alpha^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \mathfrak{g} + \\
& + \left\{ - \left[ 1 + \left( 1 - \frac{h_s}{r} \right) \gamma_s^{(2)} \right] \frac{\partial}{\partial \theta} + (2-\nu) \alpha^2 \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \theta} + \left[ \alpha^2 - \left( 1 - \frac{h_s}{r} \right) \delta_s^{(2)} \right] \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \right\} \mathfrak{w} - \quad (1) \\
& - \rho_2 \frac{\partial^2 \mathfrak{g}}{\partial t_1^2} = \frac{R^2 (1-\nu^2)}{Eh} q_\theta \\
& - \nu \frac{\partial u}{\partial \xi} + \left\{ - \left[ 1 + \left( 1 - \frac{h_s}{r} \right) \gamma_s^{(2)} \right] \frac{\partial}{\partial \theta} + (2-\nu) \alpha^2 \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \theta} + \left[ \alpha^2 - \left( 1 - \frac{h_s}{r} \right) \delta_s^{(2)} \right] \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \right\} \mathfrak{g} + \\
& + \left[ 1 + \gamma_s^{(2)} + \eta_{s1}^{(2)} + 2(\delta_s^{(2)} + \eta_{s1}^{(2)}) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \alpha^2 \Delta \Delta + (\eta_{s1}^{(2)} + \eta_{s2}^{(2)}) \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \right] \mathfrak{w} + \rho_3 \frac{\partial^2 \mathfrak{w}}{\partial t_1^2} = \\
& = \frac{R^2 (1-\nu^2)}{Eh} (q_x - q_{zz}),
\end{aligned}$$

где  $\rho_1 = 1$ ,  $\rho_2 = 1 + \bar{\rho}_s \bar{\gamma}_s = \rho_3$ ,  $\bar{\gamma}_s^{(2)} = \frac{F_s}{L_1 h} (1 + k_1)$  ( $L_1$  - длина оболочки,

$F_s$  - площадь поперечного сечения ребер,  $k_1$  - число поперечных ребер),

$\bar{\rho}_s = \frac{\rho_s}{\rho}$  ( $\rho, \rho_s$  - плотность материалов оболочки и ребер, соответственно),

$$\delta_s^{(2)} = \frac{h_s}{R} \bar{\gamma}_s^{(2)}, \quad \eta_{s1}^{(2)} = \frac{E_s J_{xs} (1-\nu^2) (1+k_1)}{E L_1 R^2 h}, \quad \bar{\eta}_s^{(2)} = \left( \frac{h_s}{R} \right)^2 \bar{\gamma}_s^{(2)},$$

$$\eta_{s2}^{(2)} = \frac{E_s (1-\nu^2)}{E} \bar{\eta}_s^{(2)}, \quad \delta_s^{(2)} = \frac{h_s}{R} \bar{\gamma}_s^{(2)}, \quad \gamma_s^{(2)} = \frac{E_s (1-\nu^2)}{E} \bar{\gamma}_s^{(2)}, \quad E, J - \text{модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки, соответственно,}$$

$R, h$  - радиус и толщина оболочки, соответственно,  $E_s$  - модуль упругости и материала ребер,  $a^2 = \frac{h^2}{12R^2}$ ,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ ,  $J_{xs}$  - момент инерции поперечного сечения ребра относительно оси  $ox$ ,  $\theta = \frac{y}{R}$ ,  $u, \mathfrak{g}, w$  - составляющие перемещений срединной поверхности оболочки,  $t_1 = \omega_0 t$ ,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2) \rho_0 R^2}}, \quad q_x \text{ и } q_\theta, q_\theta, q_{zz} - \text{давление со стороны жидкости и среды на оболочку соответственно.}$$

Принимая среду линейно-упругой, ее движение будем описывать уравнениями Ламе в перемещениях [2]:

$$a_e^2 \text{graddiv} \vec{s} - a_t^2 \text{rotrot} \vec{s} + \omega^2 \vec{s} = 0, \quad (2)$$

здесь,  $\vec{s}(s_x, s_\theta, s_r)$  – вектор перемещения оболочки;  $a_t = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ ,

$a_e = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  скорости распространения продольных и поперечных волн в среде. Здесь  $\lambda, \mu$  – коэффициенты Ламе для среды,  $\omega$  – искомая частота.

Предполагая, что основная скорость потока равна  $U$  и отклонения от этой скорости малы, воспользуемся волновым уравнением для потенциала возмущенных скоростей  $\varphi$  по [1]:

$$\Delta \varphi - \frac{1}{a_0^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 \varphi}{R \partial \xi \partial t} + U^2 \frac{\partial^2 \varphi}{R^2 \partial \xi^2} \right) = 0, \quad (3)$$

где  $a_0$  – скорость распространения малых возмущений в жидкости,  $t$  – время,  $\Delta$  – оператор Лапласа.

Давление жидкости на стенку оболочки при  $\rho = \text{const}$  имеет вид [1]:

$$p = p_0 - \rho_0 \left( \omega_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} + U \frac{\partial \varphi}{R \partial \xi} \right) \Big|_{r=R}, \quad (4)$$

где под  $p_0$  подразумевается статическое давление в жидкости,  $\rho_0$  – плотность жидкости.

Уравнения движения оболочки (1), среды (2) и жидкости (3) дополняются контактными условиями.

Условие непроницаемости или плавности обтекания у стенки оболочки имеет вид [1]:

$$v_r \Big|_{r=R} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R} = - \left( \omega_0 \frac{\partial w}{\partial t_1} + U \frac{\partial w}{R \partial \xi} \right). \quad (5)$$

Предположим, что контакт между оболочкой и средой является скользящим, т.е. при  $r = R$

$$w = s_z, \quad (6)$$

$$q_x = -\sigma_{rx} = 0, \quad q_\theta = -\sigma_{r\theta} = 0, \quad q_{zz} = -\sigma_{rr}. \quad (7)$$

Компоненты  $\sigma_{rx}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rr}$  тензора напряжений определяются следующим образом [2]:

$$\sigma_{rx} = G_s \left( \frac{\partial S_x}{\partial r} + \frac{\partial S_r}{\partial x} \right); \quad \sigma_{r\theta} = G_s \left( \frac{\partial S_x}{r \partial \theta} + \frac{\partial S_\theta}{\partial x} \right),$$

$$\sigma_{rr} = 2G_s \left( \frac{\partial S_r}{\partial r} + \frac{v_s \Delta_1}{1 - 2v_s} \right); \quad \Delta_1 = \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial S_r}{\partial r} + \frac{S_r}{r}; \quad G_s = \frac{\tilde{E}_s}{2(1 + v_s)}. \quad (8)$$

Дополняя контактными условиями (5)-(7) уравнения движения оболочки (1), среды (2) и жидкости (3) приходим к задаче о собственных колебаниях в бесконечной упругой среде, поперечно подкрепленной цилиндрической оболочкой с протекающей жидкостью. Другими словами, задача о собственных колебаниях в бесконечной упругой среде, продольно подкрепленной цилиндрической оболочкой с протекающей жидкостью, сводится к совместному интегрированию уравнений теории оболочек, среды и жидкости при выполнении указанных условий на поверхности их контакта.

Перемещения оболочки будем искать в виде:

$$\begin{aligned} u &= u_0 \exp \left[ i \left( \chi \xi + n\theta + \omega_1 t_1 \right) \right] \\ \mathcal{G} &= \mathcal{G}_0 \exp \left[ i \left( \chi \xi + n\theta + \omega_1 t_1 \right) \right], \\ w &= w_0 \exp \left[ i \left( \chi \xi + n\theta + \omega_1 t_1 \right) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

здесь  $u_0, \mathcal{G}_0, w_0$  – неизвестные постоянные;  $\chi, n$  – волновые числа в продольном и окружном направлениях соответственно,

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{(1-\nu^2) \rho_0 R^2 \omega^2}{E}}.$$

Потенциал возмущенных скоростей  $\varphi$  ищем в виде:

$$\varphi(\xi, r, \theta, t_1) = f(r) \exp \left[ i \left( \chi \xi + n\theta + \omega_1 t_1 \right) \right], \quad (10)$$

здесь величина  $\chi$  является безразмерным волновым числом,  $n$  – число волн вдоль окружности,  $\omega_1$  – безразмерная частота колебаний.

Используя (10), из условия (5) при  $p_0 = 0$  и (4) имеем:

$$\begin{aligned} \varphi &= -\Phi_{\alpha n} \left( \omega_0 \frac{\partial w}{\partial t_1} + U \frac{\partial w}{R \partial \xi} \right), \\ p &= \Phi_{\alpha n} \rho_0 \left( \omega_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} + 2U \omega_0 \frac{\partial^2 w}{R \partial \xi \partial t_1} + U^2 \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \xi^2} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\Phi_{\alpha n} = \begin{cases} I_n(\beta r) / I_n'(\beta r), & M_1 < 1 \\ J_n(\beta_1 r) / J_n'(\beta_1 r), & M_1 > 1 \end{cases}, \quad (12)$$

здесь  $M_1 = \frac{U + \omega_0 R \alpha_1 / \alpha}{a_0}$ ,  $\beta^2 = R^{-2} (1 - M_1^2) \chi^2$ ,  $\beta_1^2 = R^{-2} (M_1^2 - 1) \chi^2$ ,

$I_n$  -модифицированная функция Бесселя первого рода порядка  $n$ ,  $J_n$  - функции Бесселя первого рода порядка  $n$ .

Далее, в (1) в качестве  $q_z$  должна быть взята величина  $q_z = -p$ , где  $p$  – давление по (4).

Решение уравнений движения среды будем рассматривать в двух вариантах: а) инерционные действия среды на процесс колебаний системы несущественны; б) влиянием инерционных действий среды на процесс колебаний системы пренебречь нельзя.

В случае а)

$$\begin{aligned} S_x &= \left[ \left( -kr \frac{\partial K_n(kr)}{\partial r} - 4(1-\nu_s)kK_n(kr) \right) A_s + kK_n(kr) B_s \right] \exp[i(\chi\xi + n\theta + \omega_1 t_1)], \\ S_\theta &= \left[ -\frac{n}{r} K_n(kr) B_s - \frac{\partial K_n(kr)}{\partial r} C_s \right] \exp[i(\chi\xi + n\theta + \omega_1 t_1)], \\ S_r &= \left[ -k^2 r K_n(kr) B_s - \frac{\partial K_n(kr)}{\partial r} B_s + \frac{n}{r} K_n(kr) C_s \right] \exp[i(\chi\xi + n\theta + \omega_1 t_1)]. \end{aligned} \quad (13)$$

В случае б)

$$\begin{aligned} S_x &= \left[ kK_n(\gamma_s r) \tilde{A}_s - \frac{\gamma_s^2}{\mu_t} K_n(\gamma_t r) \tilde{C}_s \right] \exp[i(\chi\xi + n\theta + \omega_1 t_1)] \\ S_\theta &= \left[ -\frac{n}{r} K_n(\gamma_s r) \tilde{A}_s - \frac{nk}{r\mu_t} K_n(\gamma_t r) \tilde{C}_s - \frac{1}{n} \frac{\partial K_n(\gamma_t r)}{\partial r} \tilde{B}_s \right] \exp[i(\chi\xi + n\theta + \omega_1 t_1)], \\ S_r &= \left[ \frac{\partial K_n(\gamma_s r)}{\partial r} \tilde{A}_s - \frac{k}{\mu_t} \frac{\partial K_n(\gamma_t r)}{\partial r} \tilde{C}_s + \frac{nk}{r} K_n(\gamma_t r) \tilde{B}_s \right] \exp[i(\chi\xi + n\theta + \omega_1 t_1)] \end{aligned} \quad (14)$$

здесь

$$\gamma_s^2 = k^2 - \mu_s^2, \quad \gamma_t^2 = k^2 - \mu_t^2, \quad \mu_s = \frac{\omega}{a_s}, \quad \mu_t = \frac{\omega}{a_t}, \quad K_n - \text{модифицированная функция Бесселя второго рода } n - \text{го порядка.}$$

После подстановки (9) в (1), с учетом (8), (10), (11), (13) и (14), задача сводится к однородной системе линейных алгебраических уравнений третьего порядка, нетривиальное решение которой возможно лишь в случае, когда ее определитель равен нулю. Его можно записать в виде:

В случае а)

$$\det \| a_{ij} \| = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (15)$$

В случае б)

$$\det \| b_{ij} \| = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (16)$$

Коэффициенты  $a_{ij}(\omega)$  и  $b_{ij}(\omega)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) имеют громоздкий вид, поэтому их здесь не выписываем. Отметим лишь, что они зависят от вышеприведенных геометрических и физических параметров, характеризующих систему.

Решения уравнений (15) и (16) реализованы численно. Для данных приняты:

$E = E_s = 6,67 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ ,  $k_1 = 14$ ;  $\rho / \rho_0 = 0,105$ ;  $\rho = \rho_s = 0,26 \cdot 10^4 \text{ Нс}^2 / \text{м}^4$ ,  
 $\nu = 0,3$ ;  $F_s = 5,2 \text{ мм}^2$ ,  $J_{xs} = 300,8 \text{ мм}^4$ ,  $h_s = 1,9 \text{ мм}$ ,  $R = 160 \text{ мм}$ ,  
 $h = 0,45 \text{ мм}$ ,  $a_l = 2,25 a_t$ ,  $a/R = 0,5$ ,  $a_t = 308 \text{ м/с}$ ,  $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ .

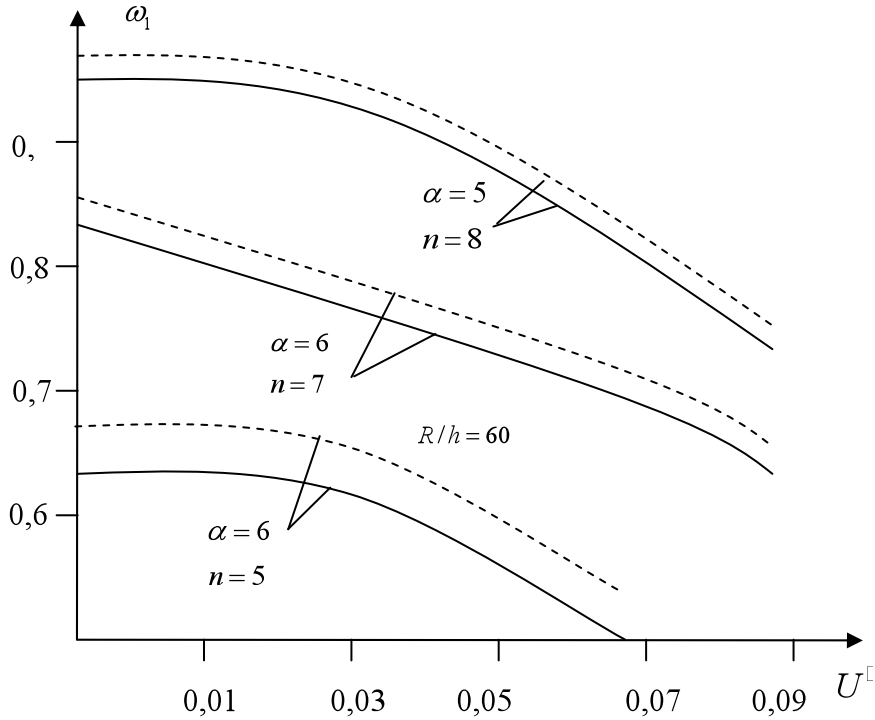


Рис.1 Зависимость частоты от скорости потока.

На рис.1 представлены зависимости частоты колебаний системы от скорости потока. Пунктирным кривым соответствуют собственные частоты колебаний системы, найденные из частотного уравнения (15), а сплошными - из частотного уравнения (16). Из графика видно, что с повышением скорости частота колебаний системы падает. Кроме того, учет инерционных свойств среды приводит к снижению значения собственной частоты колебаний системы по сравнению с собственной частотой колебаний системы, когда инерционные свойства среды малы. Следует отметить, что для значений  $U$ , при которых частота колебаний обращается в нуль, произойдет потеря устойчивости оболочки.

Отметим, что в таких задачах большое практическое значение имеет определение оптимальных параметров подкрепления цилиндрической

оболочки. В качестве параметра, определяющего оптимальность подкрепления ( $\mu$ ), принимается отношение квадратов минимальных собственных частот колебаний подкреплений ( $\omega_{\min}^2$ ) и равной ей по весу гладкой ( $\omega_{0\min}^2$ ) оболочки, контактирующей со средой. Оптимальной считается оболочка, для которой это отношение максимально.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С.. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. Москва, Наука, 320 с.
2. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Теория ребристых оболочек. Методы расчета оболочек. Киев, Наукова Думка, 1980, 367 с.

### İÇƏRİSİNDƏ MAYE AXAN HALQALARLA MÖHKƏMLƏNDİRİLMİŞ SİLİNDRİK ÖRTÜYÜN SƏRBƏST RƏQSLƏRİ

C.M.MUSTAFAYEV, F.F.ƏLİYEV

#### XÜLASƏ

Məqalədə içərisində maye axan halqalarla möhkəmləndirilmiş konstruktiv-ortotrop cism kimi modelləşdirilən silindrik örtüyün sərbəst rəqsləri öyrənilmiş, sistemin tezlik tənliyi qurulmuş və ədədi üsulla tədqiq olunmuşdur. Göstərilmişdir ki, mayenin axma sürəti artdıqca sistemin məxsusi tezlikləri azalır.

### PROPER FLUCTUATIONS IN AN ENDLESS ELASTIC MEDIUM OF DIAMETRICALLY-CONFIRMED CYLINDRICAL SHELL WITH FLOWN LIQUID

D.M.MUSTAFAEV, F.F.ALIEV

#### SUMMARY

Proper fluctuations of highly-based closed cylindrical shell in an endless elastic medium by intensified regular system have been investigated.

Frequency equations of fluctuations of considered system have been constructed and numerical realization of solution have been given.

It was shown that frequency of fluctuations of the system is falling with rising of velocity.